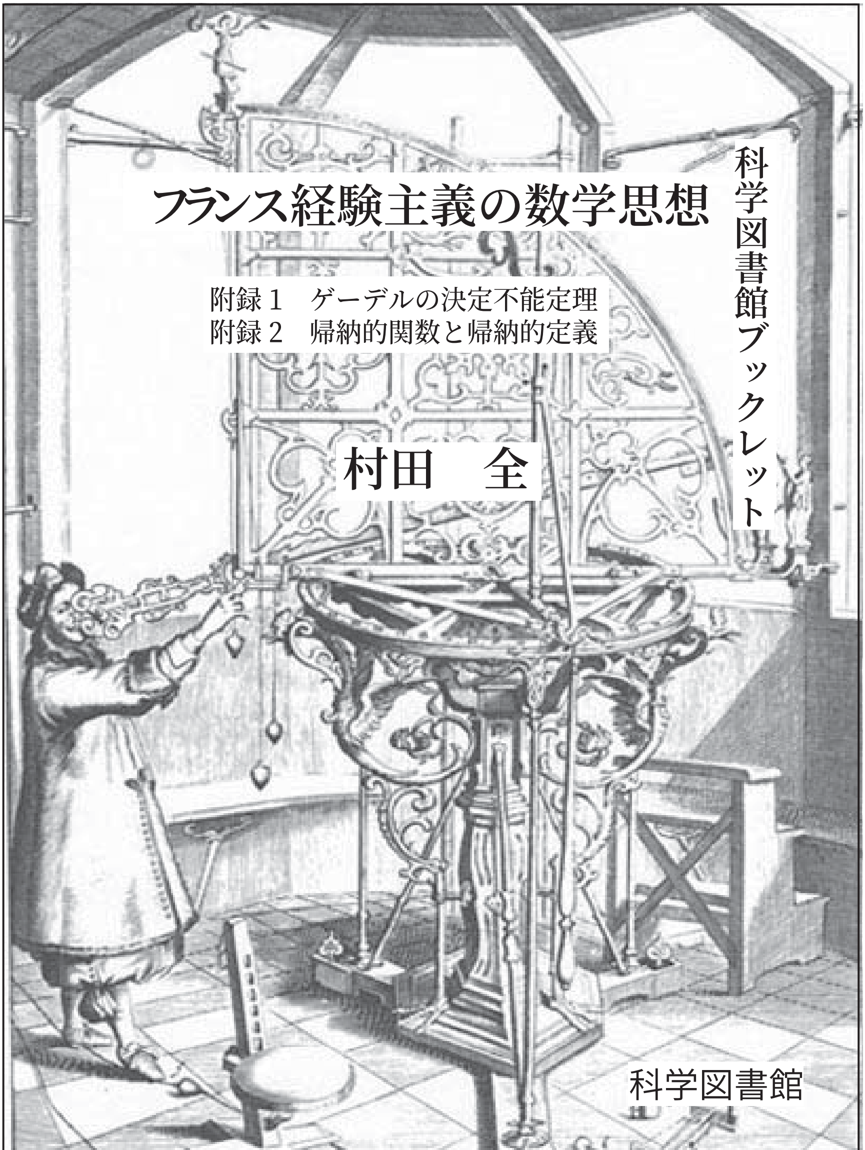

フランス経験主義の数学思想

附録１　ゲーデルの決定不能定理
附録２　帰納的関数と帰納的定義

村田　全

科学図書館ブックレット

科学図書館

フランス経験主義の数学思想

付録１　ゲーデルの決定不能定理
付録２　帰納的関数と帰納的述語

村田　全

この論文の原型「数学におけるフランス経験主義」は『科学基礎論研究』（第1巻，1955）に書かれたものだが，「ボレルのエフェクチブ概念の形成[1]」の補足として収録した。単独で読まれることを考慮した余り「ボレルのエフェクチブ概念の形成」との重複が残ったのは遺憾だが，多少でも現代的意味があるように大幅な削除と加筆をした。挿入部分【補注】と章末の【補説】がそれである。今から見ると，私はボレルたちの数学の本当の内容を離れて「思想」ばかりにこだわり，かえってその数学の本質を失した面もあったかと思うが，【補説】で少しは補ったつもりである。

1

ここでフランス経験主義の数学思想というのは，ボレル，ベール，ルベーグたちの主張を指す。この人達は別段意識して一つの主義のもとに集まったものではなく，その各々の主張にもニュアンスが認められるが，1904年にツェルメロが提出した「整列可能定理の証明」に関連して，ほぼ共通の基盤に立って数学の基礎にまつわる諸問題を論じた。現在（1955年）の数学基礎論の中で大局的に見ると，その考え方は論理主義や形式主義とは対照的で直観主義に近く，ヘイチング (Heyting) などはこれをやや軽く半直観主義と呼んでいる。いずれにしてもこの学派は今日まで不遇であり，せいぜい脇役的な役割を果たしているに過ぎない。

【**補注**　この評価は当時としても正しくなかった。補説1を参照】

この事態はどこから起こったか，また数学の本当の意味での基礎を考える際にも，それはやはりそうなのか。ここではこのような問題を中心に，今日取り扱われることの少ないこの学派の主張を尋ねたいと思う。

1)『数学と哲学との間』（玉川大学出版会）所収。PDF版は「科学図書館」に収録。http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/borel-effectif-utf.pdf

2

今日の基礎論のどの立場もそうであるが，この学派の誕生の地もまた集合論である。ところで彼らが初期の集合論においては，当時多かった反対者の仲間ではなく，むしろ理解者であったことは注目に値する。ボレルの『関数論』(*Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898；2$^{\text{e}}$ éd. 1914；3$^{\text{e}}$ 1928：4$^{\text{e}}$ 1950) やベールの『不連続関数論』(*Leçons sur la théorie des fonctions discontinues*, 1904) などは，それらの領域に応用された集合論が当時どんな成果を収めたかを示す道標ともなるもので，前者のごときは「集合論の原理と関数論への応用」の副題の下に，全体の八，九割までが集合論に捧げられていたのである。

それにしても集合論の運命はまことに数奇であって，生まれ落ちると直ぐからクロネッカーを筆頭とする既成の大家たちに叩かれる一方，やがてクロネッカー主義者と目されることになるこれら経験主義者の協力もあって，次第に確固たる地歩を占めて行く。ところがここに獅子身中の虫と言うべき二律背反が現れて，従来，理解者であったボレル達はこの頃から批判者の側に回り，ヒルベルトを代表とする若い層や，哲学的傾向の強いラッセルなどの人たちがその急を救うべく努力するようになる。そしてこの時期を境としてカントル的集合論は現代的集合論へと変貌して行くという観がするのであるが，この間の事情はもう少し詳しく説明せねばならない。そしてそれは同時にフランス経験主義を理解する一つの鍵であるように思われるのである。

ボレルたちの集合論の利用範囲を細かく検討すると，それはかなり限られた部分，可算集合，可算順序数と［限られた意味の］連続の理論とであり，そのうちでも自分たちの理論，例えば測度・積分の理論，複素関数の特異点の分布，不連続関数の特異点などに都合のよいものだけを抽き出していたのであって，集合論そのものの展開を計ったの

ではなかったことが分かる。先の二つの書物にしてもいずれもボレルの監修による『関数論叢書』の一冊であり，従ってその主題は「関数」の様相の研究であったことが窺われるのである。

当然，超限順序数でも可算の第 2 級順序数（第 3 級の始数 Ω 未満の）

$$1,\, 2,\, 3, \cdots,\, n, \cdots, \omega,\, \omega+1, \cdots,\, \omega^2, \cdots,\, \omega^{\omega}, \cdots,\, \omega^{\omega^{\omega}}, \cdots (< \Omega) \tag{1}$$

は認めるが，ボレルは［初版付録を除き］「第 2 級」の肩書きを付けないで単に「超限数」という。「第 3 級」以下を予想させるような名は彼らには邪魔なだけである。ところがこの可算順序数列は，途中のどこで切ってもそこまでは可算集合で，その上限である順序数が可算順序数として得られること（ボレルのいわゆる「超限の二律背反」）が分かっており，そのために (1) の最後の $\cdots$ には「万人共通のイメージがありえない」として，ボレルは可算順序数の「全体」という概念を決して認めなかった。

【**補注**　第 2 級順序数も，ボレルでの原型はおそらく増加関数の増大型の理論である『関数論』初版付録 II。】

こう言うと，自然数全体に現れる $\cdots\cdots$ はどうかという問題が起こってくる。実際，自然数の列は各数の後に必ず次の数が $+1$ という同一の形で現れるのに対し，可算順序数の方も（常に同一）とは言えないにせよ，$+1$ あるいは極限の数を取ることによって具体的に行えるのだから［カントルの第 1，第 2 生成原理］，両者の間に別段の差はないのではないかというわけである。

ベールは後者の全体を斥けるとともに自然数の「全体」にも信をおかず，論争のはずみにもせよ，「一切は有限に引き戻されねばならない」と言い，カントルの基本思想にも最も根元的な批判を持っていた（補説 2）。

反対にルベーグは同じ対比を盾にとって，別の場所（『積分論』(*Leçons sur l'intégration*，1904 の注）では「両者が同等の明晰さをかち得るよう

に，第２級順序数の列も頻繁に使い慣れてしまうことだ」と言っている。

その中間にあってボレルは色々な試論の揚句（あげく），自然数全体は認め，もう一つの全体は認めぬと言う結論に達するのであるが，その根拠は必ずしも論理的なものでなく，プラグマティックないし心理的なものである。ここにはボアンカレの影響もあったであろう。即ち「ベールの有限主義は論理的には強固であっても，実際にはかえって厄介（やっかい）になり，しかも自然数の自然列は誰もが同じ心像をもつ（らしい）のでこれを認めるが，可算順序数の「全体」の方は数学者の間で単一鮮明な像が浮かばない上，今のところさほどの効果もないからこれは拒否しよう。……この決定には具体的事実の観察あるのみだ」という（『関数論』第２版付録IV，Vlll 要旨）。そう言えばベールですら，不連続関数の研究に際しては「可算順序数の全体は記号化できないが，それでも個々の順序数を論ずるのに遠慮は要（い）らない」とするくらいで，論理的に多少の雑音はあっても混乱なしに使えて役に立つものなら，どしどし使って行こうというプラグマティズムは，そこに共通に底流していると言えよう。

以上，粗雑なスケッチであるが，この学派の基調が効用［ただし自分たちの理論の目的の下でのもので，選択公理の効用などは無視］と，ひいては対象の具体性の追求であり，その研究の重点が関数であったことは明らかであろう。彼らにとって集合論はあくまで手段であって，決して目的ではなかったのである。

3

これに対して集合論の方はフランス人達の望むのと逆の方向に動いて行く。ツェルメロによる整列可能定理の証明（1904）から公理的集合論の建設（1908）に到る動きがそれである。

しかしこの間にボレル達の果たした批判的役割は重要で，ツェルメロの「証明」の一歩一歩を彼らの批判を聞きながら辿（たど）って行くのはな

かなか面白い。即ち，ツェルメロが「与えられた集合の部分集合の全体を取れ」というと，彼らは「それはいつでもできるのか？ 例えば区間 (0, 1) の場合はどうか？」と言い，ツェルメロが「各部分集合において目印元を指定せよ（選択公理）」というと，B は「どんな法則で？」という。「法則はともかく，目印元を思い浮かべて固定しておくだけでよい」と言えば，「思い浮かべるだけで，他人の考えていることとの同一性はどう確かめるのか？」と言う，といった具合である。

およそ数学上の「証明」の真偽が，その原理にまで遡ってこのように議論された例は稀であろう。勿論，フランス人の間でも順序数におけるような意見の相違はあったが，ここでの論点は証明の展開の方ではなく，出発点たる公理にあった。公理的集合論の窮極の問題が逆理の克服にあったことはいうまでもないが，ツェルメロが公理系の建設に走った直接の原因がこの整列可能定理の証明を巡る論戦であったことは確かである。

注意すべきは，ここで集合論ないし数学が変貌を遂げつつあったことである。もともと集合論は論理的色彩の強い学問であるが，公理的集合論の示したものは正にその論理的骨格であった。例えば先の「証明」でボレルたちが抗議した「集合の部分集合の全体」や「目印元の選択」等は，それぞれ「冪集合の公理」，「選択公理」の名で天降りに要請され，問題はそれを受け容れるか否かとなる。その具体的なニュアンスをとやかく言うのは，極言すれば縁なき衆生になるだけである（しかもボレルたちの議論の中にも選択公理はしばしば混入していた！）。今では集合論といわず数学全般で，やかましく言えば選択公理なしに事がほとんど動かないと言ってよい[1]。

【補注　私は論理性だけが集合論だとも，まして数学だとも思わないが，ともかく近世以後の数学でその論理的骨組みが判然と表面に現れるのはこの

1) 田中尚夫『選択公理と数学』（遊星社，1987）

頃からと言えるであろう。即ちこの頃から「数学は変貌した」のである。】

このことは或る意味ではカントルの理論自身の展開についても当てはまる。彼の仕事の発端も三角級数の問題だったから，彼もまた関数の様相を尋(たず)ねてそこに到ったには違いないが，その後の集合論は進路を自律的に決定し，他の領域にどう使われるかは二の次として逆理(パラドックス)の克服や連続体問題のような固有の問題を見出したのである。しかしそれとともに，初めの頃の「自然数対偶数」のような素朴で具体的な対応は死に，ここでも論理的形骸が残るだけとなる。

【**補注**　この変貌の推進者はデデキントであろう。なお「カントルの集合論形成のスケッチ[1]」，「カントルにおける数学と哲学[2]」参照。】

しかしボレルたちの「関数」にしても，本来は変数の取りうる無限個の値にそれぞれ値を対応させる仕事を短い文章や簡潔な式で表現するという大変なことなのだが，その「関数」の中にツェルメロ的な代表元の選択「規則」（選択関数）の入る余地はなかった。それは無限の言葉を要する規則，むしろ「無規則という名の規則」ではないかと彼らは考え，公理的集合論にそっぽを向いたのである。

しかし勿論(もちろん)彼らには依然として彼らの集合論があり，それ以上に彼らの「数学」があった。測度や関数の分類のみでなく，過度に抽象的な対応の代(か)わりに，実際的な対応規則を現実の中から探(さぐ)り出す方向，例(たと)えば確率論や統計学へその研究が拡がって行くところに彼らの「数学」の所在がうかがえようし，そこに彼らの「数学の基礎」を探すことも可能である。（ボレルには『関数論』第 2 版付録 V「可算確率と数論的応用」があるほか，確率論とその応用に関する著書があり，別に『確率論叢書』も編集している。）

---

1)『数学と哲学との間』（玉川大学出版会）所収、PDF 版は「科学図書館」収録 http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/cantor-menge-utf.pdf」

2)『数学と哲学との間』（玉川大学出版会）所収。PDF 版は「科学図書館」収録 http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/cantor-math-utf.pdf

4

このようにしてフランス経験主義の基調は，具体性と実用性という以上には掴みにくく，時として「一定不変の原理がない」とか，「自分の学問に役立ちそうなことは無原則に採り入れるオポチュニスト的傾向」とかという厳しい批判も与えられる。また事実，ルベーグなども選択公理に関して，第一次大戦後の 1922 年頃のことだが，「この公理から具体的かつ有効な成果の得られるときこそ，その本当の功徳が分かるというものだが，いずれにせよ人は次第にこれに慣れ，使いこなすようになって，今日われわれを悩ませている哲学的障害もいずれはなくなってしまうだろう」と言っているから，オポチュニストの批判も決して不当とは言えないかに見える。しかしこれは優れた学者に見られる思考の柔軟性の一面でもあるから，例えばそれだけでルベーグを攻撃するのは不当であろう［補説 3，4 参照］。

しかし上の論争を経た後の「集合論の諸原理」(1908,『関数論』付録 IV–V）になると，ボレルについては，もう少しはっきりした考えが見られ，それ以後の彼の意見は決してふらついているとは思えないので，その大要を要約しておく（ゴシック筆者)。［なお「ボレルのエフェクチフ概念の形成[1]」参照］

初めに結論として次のことが宣言される。

「集合論の諸原理に関する討論から私が得たのは，種々の濃度についてわれわれが厳密に知っているのは可算集合と非可算集合とがあって，後者は全く **否定的**な概念だというリマーク以上の何者でもないという確信だけである。」

次に個々の問題に移って，第 2 級順序数の全体は明晰と認められないが，自然数全体は明晰と認める。その根拠は，人が **言葉によって**混

1)『数学と哲学との間』(玉川大学出版会) 所収、PDF 版は「科学図書館」収録。http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/borel-effectif-utf.pdf

乱なくその内容を理解しうるかどうか，またそれに伴って単なる **記号体系**でない具体的かつ有効な数学的成果が得られるかどうかによるというもので，これは既に述べた。ここに現れる言葉に関する議論はなかなか重大である。

「自然数列という言葉で，人は（少なくとも哲学者でなく数学者ならば）**同一のもの**を諒解したとの確信を持つ。ところがこれこそ言葉の有効性を質すに当たって頼らざるを得ない唯一の基準である。というのは，いわゆる論理体系にしても，必ず通俗言語の存在という公準の上に立っているからである。大衆に共通なこの言語，大衆が用いてもって互いに大体諒解しあって行くこの言語は，われわれに与えられた一つの事実であり，もしこれを無の中から創造せねばならないとすれば，大変な循環論を引き起こしたことであろう。」

次に記号に関する意見が来る。

> 「可算順序数の全体に十分確定的な記号は付けられないから，議論は勢い象徴的 (symbolique) になり，その集合も一種の象徴とならざるを得ない。この種の一般論は矛盾さえ含まねば正しいが内容をもたない。内容を盛るには要素の指定がいるからである。そこでこの理論は一種の論理代数になるが，人々の心に共通の像を浮かばせるべき本体を欠く。もっとも，これも必ずしも無駄ではなくて種々の概念を解明するぐらいには使えるし，それをきっかけに具体論が生まれる可能性もある。しかし何としてもその真の内容について空想を逞しくしてはならない。」

最後に連続体については，幾何学的直観に関する限りで非可算集合の唯一明晰な例だとする。ただし，

> 「連続体は算術的 (arithmétique) に考えると「全体」という形では与えられておらず，その内で確定的に定義しうる要素の集合は可算でしかない。またそのような定義の試みをいかに進めても連続体は尽

きないという事実も，「否定的」な命題対角線論法で示されているに過ぎない。」

なおこれらの「確定的に定義」された点の全体を，彼は後に「実用的連続体 (continu pratique) と呼び (『関数論』の付録 IV の VI. p. 164)，この議論を実関数の領域にまで展開した。

【**補注**　この実用的連続体の概念には，論理的にはリシャールの逆理に関連して「有限語法」の問題があり，内容的にもなお曖昧さが残っている。記述的集合論の階層の理論や構成的解析学はこの点の明確化から発足し，現在 (1998) では計算可能関数などの形で改めて取り上げられている（「附録2」参照)。】

さて以上の内容をよく見ると，事はなかなか重大であることが分かるであろう。言葉に関する議論は，これを徹底させると一つの言語哲学にいたり，数学的「真理」の意味の再検討ないしその或る程度の制限にまで及ぶであろうし，記号の議論も，同様のつながりで考慮すべき点があるであろう。しかしこのような考え方の中では，形式的数学の最大の難関である応用数学の可能性の問題には，かえって光明が見いだせるように思われる。

ともあれ，こうしてみるとラッセルの論理主義やヒルベルトの形式主義とはもとより，ブロウエルの直観主義との差もはっきりしてくる。直観主義の場合，言葉や記号を数学的内容の伝達手段としてだけの意味に縛ろうとしているからである。そこで次にはボレルの思想を，これらの立場と比較しつつ，できるだけその言葉を借りて検討することにしよう。

5

ラッセルの論理主義についてはこの学派からの発言はほとんど見当(みあ)たらない。しかし数学に固有の直観を認めず一切を論理化せんとした

論理主義のプログラムは，フランス経験主義の対蹠点(たいせきてん)であり，しかもそのプログラム本来の企画が既に挫折した今となっては，これ以上説明の要はあるまい。なお論理主義の批判はポアンカレが『科学と方法』『晩年の思想』などで再批判しており，それは同時にボレルたちのものとしてよい。

形式主義についても，公理系の無矛盾性と「有限の立場」(無矛盾性の証明の基盤になる「有限的」直観的な推論，これも初めは曖昧でその厳密化が基礎論の一つの問題になるが) とを両輪とした当時の証明論に対しては，ボレルから格別の発言もない。論理主義や形式主義に対するその沈黙はおそらく関心の相違であり，またそれが双方の「数学」の違いでもあろう。ただ 1903 年に公にされた『幾何学基礎論』の頃のヒルベルトのことはボレルが多少触れているので，次にそれを摘出しよう (「数学的無限と実在」,『関数論』第 2 版付録 IV の VIII)。ここでの問題は無矛盾性である。

「ヒルベルトは或るものの体系を考え，これに天降(あまくだ)りにいくつかの性質を付与する。公理を制限する条件は，そこに矛盾が含まれていないことである。さてこの出発点から演繹(えんえき)されたものが幾何学であると彼は考えている。……これは，人間には語義を創造しそれをもって論理的構造物を築き上げる権利があるという意味では正しい。しかし論理的無矛盾が科学の構造を規定しているわけではない。

【**補注**　この議論の主旨もポアンカレに見られる。これらをヒルベルドの「公理論的思惟」『ヒルベルト幾何学基礎論』(第 7 版，1930) 所収の中村幸四郎訳，弘文堂，1943) と比較すると面白い。】

「ヒルベルトの仕事を数学の一部と考えてよいとすれば，それは彼が点，線，面と呼んだ“或るもの”と，普通人のいうそれらのものとが密接な関係を持っているためである。……ヒルベルトにしても，もし幾何学が昔から通常の形で存在していたのでなければ，彼の統

合編纂した公理的性質を例の“或るもの”に与えようとはしなかったであろう。勿論(もちろん)，幾何学の定義を厳密に満たす対象があるとは誰も思っていない。しかし近似的にそれを実現している対象が知られていなければ，幾何学はできていなかったはずである。……」

この批判が「公理的思惟」の中に潜(ひそ)めたヒルベルトの意図にどれだけ耳を傾けたものかは分からないが，ボレルの重点は実は暗々裏に相変わらず第 2 級順序数であり，整列可能定理であった。そこで彼はそれらをひっくるめて次のように結論する。

「こういう論理的見地では結論の価値は言葉の上だけで，仮に古典数学を「実在」の名で呼ぶとしても，それらの論理的建造物と実在とは何の関係も持たない。」

実在との関係というのは，多少とも哲学的に考えると形式主義の一番痛いところであり，これに関するボレルの議論もなお続くのだが，これは一応ここで切り上げる。

次の問題はヒルベルトの「有限の立場」とボレルの立場との関係であるが，これは推測によるほかない。ちょっと考えると，この度はボレルの方がむしろ超越的に見える。即ち有限の立場が例(たと)えば自然数の議論を具体的，直観的性質に限るのに対し，ボレルはその「全体」を認めているような点である。しかし彼の言う「全体」は公理主義者の場合と意味を異にする。ボレルは自然数全体を一まとまりの対象と認めても，そこからでたらめに数を拾って作って行く無限部分集合は，**構成規則**のないために数学の対象としないということがあるなど，両者の比較はそう単純には行かない。しかし両者の一番の差異は有限の立場なるものが証明論においては，それによって無矛盾性その他，公理系の構造を明らかにする手段だったのに対し，ボレルの立場では，そこから数学を展開させる出発点だったことである。この点を顧みれば，上のような形の上だけの比較自体が既に問題を逸していたと言えよう。

【**補注**　他方，公理的集合論では「分出公理」によって，集合の十全確定的な部分は必ず部分集合と認められる。参考までに言うと，私は 1955 年当時まだゲーデル，ゲンツェンなどの論文を読んでいなかった。】

この最後の点は直観主義についても当てはまる。勿論，形式主義に比べると，ブロウエルの直観主義はフランス経験主義に遥かに親近性を持っている。ここにヘイチングが行った比較があるが (Heyting, *Mathematische Grundlagenforschung*・*Intuitionismus*・*Beweistheorie* (『数学の基礎・直観主義・証明論』), 1934)，彼はそこで広い意味での直観主義の原則として

(1)　数学は形式的意味を持つのみでなく内容的意味を持つ。

(2)　数学的対象は思考する精神によって直接に把握され，従って数学的認識は経験から独立である。

の二つを取り，この (2) の解釈如何によって経験主義を直観主義から分かっている。即ち数学的対象をわれわれの思考と独立なアプリオリな存在と認めた上で，われわれが構成的にその模写をして初めてこれが認識されるとするのがフランス経験主義であり，これに反して思考と独立な数学的対象の存在は，少なくとも数学的証明の手段としては一切これを認めぬのが直観主義だというのである。また直観主義の論理を，無限集合への排中律の無条件適用に対する批判に基づき，二重否定の消去 $(\neg\neg A \rightleftharpoons A)$ を禁ずる論理として特徴づけたのも，ヘイチングである (「数学における無限と有限の弁証法[1]」補説 6 参照)。

このような割り切り方は，双方の「数学」に共通な面，例えば「構成」ということを中心にしつつ，その中でどこがどう違っているかを調べるには都合のよいものであろうし，ヘイチングの目標もその辺りだったのだろうが，上来見たことによると，これが直ちに両者の最も深い差になるとは思われない。なるほど或る見方からすれば，前述のボ

1) 『数学と科学との間』（玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」所収。`http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/math-inf-finite-utf.pdf`」

レルの連続体の議論などはその幾何学的直観を天与のものとして受け容れ，その要素を後から算術的に掘り出すという形を取っている。また自然数列の場合にも同様の推察はできよう。しかしヘイチングの見方を裏付けるべき材料は，その引用文献から見る限り他に見当たらないし，ボレルの方は，上の引用のように，大衆の言語といい応用がどう利くかという，いわば霞の中に立っているのであって，それがヘイチングの言うような，はっきりした形を取り，簡単に比較を許すようなものであったとは言えぬであろう。筆者にはやはり「数学」の違いが一番に念頭に浮かぶのである。普通の哲学的議論ではないとしても，そのこと自身が一個の「哲学」である。

幸いボレルは一度だけ，ブロウエルに対してではないが直観主義における排中律の問題を論じている。これは彼の数学観がはっきり出た面白いものである（1928,『関数論』第 3 版付録 VII の V，p. 279）。

事のきっかけは，ワヴル (R. Wavre) やレヴィ (P. Levy) が彼らなりの「経験主義の論理」について行った論争であったが，その経験主義は自分のものとは別物だとボレルは言うのである。その論争では（$x^n + y^n = Z^n$ を満たす 3 以上の自然数解はないという）フェルマの問題が出てくるが，直観主義は実証性と構成可能性に重きを置くので，論理的命題にもその要求が課せられ，［その解決が伝えられる 1996 年現在と違って］当時は「その n は存在するかしないかいずれかだ」と言っても実証的意味はなかった。直観主義ではこういう命題は真でも非真でもないとして，排中律の無制限な適用を避ける点がその論争の主題であった。しかしボレルは言う。

「論者はその真, 偽, 真偽不明等々, 排中律について形式的な議論を上下するばかりで，フェルマの問題の本質とは全く離れている。従ってそこから現実的な結果が出るとも思えないし，よしんば何か結果が出ても本来の問題に新しい何者かを加えるとも思えない。本当の

数学ならば，クンマーの「理想数」の導入がデデキントの「イデアル論」の発端となったように[1)]，決定的解決には到らなくとも数学のどこかに影響し合って行くものだ。数学は全く客観的な科学であり，論理的演繹(えんえき)の単なる集積ではない。そこに整理と選択が行われ，残されて行くものがクラシックである。それは一本の糸ではなく，数学の各領域を繋ぎながら全体として数学という豊かな織物を織りなしている。」

そしてその織物の裾(すそ)は物理学その他の科学の上にも漂い，例(たと)えば

「分子の不連続な集まりを連続面や連続固体で置き換える方が研究しやすいから，それに役立つ無限は許すが，超限数のようないかなる人間にも不可能と思えることの可能性などは人間の科学には入れぬことにしよう」

となったり，逆にこのことの反映が物理学の上にも帰って行く。例(たと)えばブラウン運動の正確な予見などは，

「言葉があまりに多く要りすぎて，科学もこれには手を着けようとしないのではなかろうか。」

そしてここには再び例の確率論や統計学への道が開けている。

「あれこれの意見は大したことでない。大切なのは，数学がこぞって受け入れ得るような，学問の進歩による解決である一個の事実である。」

【**補注**　1997 年現在，統計的手段の他に決定論的だが自己相似関数の反復によるフラクタル等の方法が現れた。もとよりこれだけで事がすむとは思えないが，私はこの新しい動きを今後の数学の重大な転回点と予想している。】

6

1)「カントルの集合論形成のスケッチ」補説 1（村田全『数学と哲学との間』（玉川大学出版部）。『科学図書館』所収。http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/cantor-menge-utf.pdf

こうしてみると, ブロウエルが皮肉混じりに「自分なら “in the human intellect” と言うが，ヒルベルトなら “on paper” と言うだろう」として，人間の内か外かをはっきりさせようとした数学的真理の所在を，ボレルたちなら次のように答えたのではあるまいか。

「人間の内か外かは知らないが，ともかく今のところはともかく言葉も通じているし，それで役にも立っている。そして今後もおそらくそうであろう。われわれのよるべき事実はこの他にはない。……」

筆者はフランス経験主義の原理をこのように解し，半直観主義ではなく一つの正真正銘の経験主義として位置付けたいと思うのである。それが経験を直ちに数学的命題とし，あるいは単純な経験の上に数学を築こうという意味の経験主義でないことは言うまでもない。これも広い意味でロック，ヒュームの伝統に繋がる経験主義の一種である。

さてこうなると，今日の基礎論を共通に貫く何者か，論理性あるいは，より深く一元論的傾向とでも言うべきものは，その方面への意欲からしてここにはほとんど見当たらない。（ボレルが「超限の二律背反」の他に取り上げた逆理は，実用的連続体 (continu pratique) との関連で触れたリシャールの逆理だったが，彼はこれを「形而上学的考慮も純論理的考慮も交えず現実的に」検討した。）この土の上では「基礎論」は枯死するばかりであろう。彼らも時には詩を作るけれど，それは「詩を作るより田を作れ」という詩である。その意味でこの学派は今後とも，何かのヒントを与えるぐらいのことは別として，今日の基礎論を動かす力になろうとは先ず考えられない[1]。

問題はむしろ別の方にある。上でこの学派の原理として推測したものを真に実証的に裏付け，純粋数学から応用数学へ，更には他の諸科学へとその構造を明らかにして行くことは重大な仕事であろう。また更に彼らの立場を形式主義の方向に向かってゆるめ，例えば超限数と

1) 誤解！　補説 1 参照

自然数の比較に当たってベールとルベーグの間に見られたような解釈の緩急を逆用して，「現に生きて動いている数学」の構造を経験論から形式論にまで累層的に拡大探求してみることも，うまく行けば面白い仕事であろう。彼らの言うように，形式の中にも経験的内容は潜入せねばやまないが，逆に彼らの経験の中では形式が相当な役割を果たしているし，彼らはそれを「数学」だと言っているからである。上記の有限の立場の件などはその一つの鍵であろう。

ポアンカレはかって経験派と公理派との論争について「人々は互いに理解し合わない，彼らは同じ言葉を話さないし，修得しえない諸言語というものがあるからである」と言ったが(『晩年の思想』)，形式主義と直観主義とは有限の立場や二重否定の解釈を介して今日次第に歩み寄っている。経験派の場合にも，数学の違いはそれとして，あるいはそれならばこそ，通約が介在する意義はまだまだあるであろう。フランス経験主義の数学は少なくともこれらの問題を，数学の基礎を考えるものに黙示しているように思われる。そしてこれが，1 節の終わりに「フランス経験主義の思想は数学の本当の基礎を考える際にも云々」として提出した問いに対する筆者の答えである。

補説 1　個人的回想

以上は 1955 年における私見だが，この数学についてそれ以上の意味を見抜けず，積極的なことを何も残せなかったことは慙愧に耐えない。当時は十分意識していなかったが，私は現在「数学の基礎」を専ら理論数学の論理分析と論理的整合性に置くことを片手落ちだと考えている。「数学」とは理論と経験の二本の脚で立つ学問であり，現に 18 世紀頃までは当時の現代数学の真理性をその経験的世界への適用の成功によって確かめる考えも確かにあった。勿論これは今日の数学的な数学基礎論とは別物で，そのためにはカント的数学・自然科学批判

の何らかの意味での再興が必要になるかもしれないし，また全く別に，カオスやフラクタルのような現代的数理科学の方向で経験科学と数学的真理との新たな結合に向かうのかもしれない。いずれにせよ，私は「数学の基礎」をこのような長い目で考える時に，本当にボレルたちの数学を「経験主義」と呼ぶことができると思う。

以上の系統の発展としての解析集合論は 20 世紀を通じて依然進行しており，日本は当時ロシア，ポーランドとともに一つの中心であった。それは私の数学プロパーの出発点でもあったが，私は不敏にして，これを数学思想の上に将来大きい歴史的影響をもつだろうとは考えていなかった。ところが 1935 年前後にチャーチが帰納的関数の理論を導入して与えた解釈（Church's Thesis，付録 2 参照）を与えてからこの分野は大きく動き，数学思想にも多大の影響を与えた。

チャーチの仕事の発表後，最初にそれを日本に紹介したのは近藤洋逸氏だと思うが（1930 年代後半）数学界からの反響は乏しく，その頃の日本でチャーチの仕事は余り知られていなかった。近藤基吉先生は数少ない例外で，“黙殺された近藤（洋逸）さんの不遇”を，九州大学の研究室でのセミナーの後で話されたことがある（1952 年頃）。もっとも，それは今日「（P_2 集合に関する）近藤の一価化定理」（補説 4–4）として知られている御自分の仕事が，発表当時，国の内外で「黙殺」された経験の述懐だったかもしれない。ともかくこれが敗戦数年後の日本でのこの分野の状況であった。

チャーチの仕事の意義は 1950 年代後半から，クリーネ，アディソン，日本では近藤基吉，栢植利之などの諸氏によって息を吹き返し，以後，この方面の多くの古典的理論は新しい表現形式の下で曖昧さのない記述集合論の定理として書き換えられたのみでなく，この方向は数学基礎論のいわば具体的表現の面を受け持つ大きな理論に成長して今日に及んでいる。

ついでながら，この新しい動きの始まったのは，ちょうど私が近藤先生の下でこの分野に入った頃だが，その後，私は数学よりも歴史や哲学の方に関心を移してこの分野の勉強に身を入れなくなり，以後のこの方面の進展には暗い。この方面で大きな業績を残された栢植氏は当時の私の仲間である。

補説 2　ベールの集合論批判

ベールにはカントルの濃度，超限数の考えに対する最も根底的な批判があった。それはツェルメロが整列可能定理[1] の最初の証明（1904年 9 月 24 日付け，ヒルベルト宛の書翰より）を発表した直後，ボレルの批判的論評（1904 年 12 月 1 日付け）に引用されたもので，以下はその試訳である（後半部分の原文は，ルージンの ‘virtualite’ の吟味のためで，「連続論覚え書き[2]」第 3 節に掲載。)。

「私個人としましては，連続体，または種 (espèce) において同じことですが，正整数の列の集合と整列集合との間に共通の測度が見つかるなどということに疑問をもちます。私にとって，そこにあるのは **潜勢的に** (**virtuellement**) しか定義できない二つのもの，しかもそれらの **潜勢性** (**virtualites**) は一つに縮約ないし還元できない (irréductibles) 可能性のあることなのです。」

文中，virtuellement，virtualité の訳語は仮のもので，これにきっかり対応する日本語は見当たらないであろう。元来，virtuel は，形式的存在とも現実的存在とも違う潜在的本質の意味で，スコラ哲学で使われていた。ボレルが『関数論』の増訂の中で次第に固めていった意味

1) 「カントルにおける数学と哲学」(『数学と哲学との間』玉川大学出版部) 所収「補説 2」。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/cantor-math-utf.pdf に収録

2) 『数学と哲学との間』（玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/renzoku-memo.pdf

とは異なり[1]，ルージンの解釈は更に異質になる[2]。

連続体と整数の無限列の全体とが“種 (espece) において同一”というのは，（ベールたちも多用した）実数の無限連分数展開が両者の一対一対応を与えることを見れば分かるが，他方，ベールの連続観もこの程度には原子論的だったわけである。連続体と整列集合の間の“共通の測度 (une commune mesure)”，“潜勢的”，“潜勢性”，“縮約ないし還元できない”(irréductibles) などのことは，カントルが「無限線状点集合第 3 部」(1882) の中で，

「この意味での集合論は，数学だけに限って言っても，数論，関数論，幾何学等を包摂し，これらは濃度の概念に基づいて一段と高い統一の形に還元される (zu einer höheren Einheit zurückgeführt wird)。そして不連続者も連続者もこの同一の見地から考察され，共通の測度 (gemeinschaftliches Maß) をもって測られる」

と書いたことへの反論であろう。実際，ベールの意見はカントルのこの論文と対照するとき，その批判的論旨がもっとも鮮明になる。

更に推測を進めると，virtualit́e はベールがカントルの Mächtigkeit に与えた試訳ではなかったかと考えることもできる。実際，virtue1, virtualité はラテン語の vir（男），virtus（男らしさ，力，効果，徳）に由来し，潜在的能力はあるが現実化はされていない状態を表す言葉である。ライプニッツの章句「算術全体と幾何学全体は生得的であり，潜在的な仕方で (d'un emanière virtuelle) 私たちの中にある」（『人間知性新論』,『ライプニッツ著作集 4』工作舎，1993，p. 65）が，この脈絡によく合う。一方，カントルの Mächtigkeit は vis（力，強さ）に当たるが，こ

1) 「ボレルのエフェクチフ概念の形成」（『数学と哲学との間』玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館 `http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/borel-effectif-utf.pdf` 所載。

2) 「連続論覚え書き」（『数学と哲学との間」玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」`http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/renzoku-memo.pdf` に収録

れを virtus と結びつけても特に牽強付会(けんきょうふかい)とは言えないだろうし，それならば，上の最初の virtuellement は「強さ (濃度) としか定義しようのない」の意味に取れ，後の virtualités は正に「濃度」で，「二つの濃度がカントルの言うような“統一”に帰する可能性はない」の意味に取れる。ただし「五つの手紙」の中でのベールの ‘virtue1’ の用例には単に「潜勢的」と取る方がよさそうなものもあり，両者の意味に関連が付けられぬわけではないが，もう一つ断定的なことが言えないでいる。

実は，上の翻訳は三十数年前のもので，当時ボレルの『関数論』の翻訳まで考えていたが，上の件を含めて多くの数学上の疑問が残ったため発表を躊躇して今日に及んだのである。私はパリにいた 1972-74 年の間，折にふれてベールの遺稿を探したが，彼は独身だった上に一人の兄も亡くなっていて，遺稿は既にほとんど散逸してどうしようもなかった。友人デュカク (Dugac) 氏の論文 (Notes et documents sur la vie et les œuvres de R. Baire, *Archives of History of Exact Sciences*, vol. 15, 1976) は史料の点で最善であろう。前出の田中尚夫氏の力作『選択公理と数学』には上の手紙の訳も出ており，翻訳に多少の異論はあるが，私には書けない現代的展望には教えられるところが多い。

補説 3　ボレル集合・ベール関数・ルベーグ可測集合

3-1)　ボレル集合

ボレルは或る種の点集合に，可算性の考慮の下で具体性，有効性のある測度を定義しようとした。出発点は有理数を端点とする区間，縦横の辺が座標軸に平行で頂点が有理数の長方形，同様の直方体等の「基本区間」で，長さ，面積，体積などをそれぞれの測度とする。次に可算個の可測集合の和集合，共通部分，可測集合の差の三つの操作を第 2 級順序数に沿って反復適用し，そこに測度を与えようとする。例(たと)えば区間 $A=(0,1)$ の一点 x の集合 $\{x\}$ は，可算個の減少基本区間の共通

部分として可測で，測度は区間の長さの極限値 0，A の有理数の集合 R は可算個の点の和集合で測度は 0，無理数の集合 J は差集合 $A-R$ で測度は 1 とする類である。その全体がボレル集合（B 集合）だが，彼はそれを拡大するだけで「可測とは何か」を十分吟味しなかったため測度の一意性等に問題が生じた。それを整備したのがルベーグの測度論である。

以下，無理点のみを「空間」と考えると，基本区間は閉集合かつ開集合となり整理がしやすい。このとき B 集合は下のような階層を作る。基本区間の族 $\boldsymbol{I}$ の拡大として開集合 G の族 $\boldsymbol{G}(=\boldsymbol{G}_0)$，閉集合 F の族 $\boldsymbol{F}(=\boldsymbol{F}_0)$, その上に可算個の G の共通部分の族 $\boldsymbol{G}_\delta(=\boldsymbol{G}_1)$, 同じく F の可算和の族 $\boldsymbol{F}_\sigma(=\boldsymbol{F}_1)$, 以下, $\boldsymbol{G}_{\delta\sigma}(=\boldsymbol{G}_2)$, $\boldsymbol{F}_{\delta\sigma}(=\boldsymbol{F}_2)$, $\cdots$, と続き, 第 2 級順序数 α の添え数（「B 集合の階数」）まで拡大される。各 $\boldsymbol{G}_\alpha$, $\boldsymbol{F}_\alpha$ は共にそれ以下の族を全て包むように定義される。この間, 例えば $\boldsymbol{G}_\omega(\boldsymbol{F}_\omega)$ は $\cup\boldsymbol{G}_n(\cup\boldsymbol{F}_n)$ の他に，途中の $\boldsymbol{G}_{in}(\boldsymbol{F}_{in})$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \omega)$ の元の可算和（可算共通部分）をも含み，$\boldsymbol{G}_\omega = \boldsymbol{F}_\omega$ となる。

$$\boldsymbol{I} \subset \begin{cases} \boldsymbol{G}_0\subset\boldsymbol{G}_1\subset\boldsymbol{G}_2\subset\cdots\subset\boldsymbol{G}_\omega\subset\boldsymbol{G}_{\omega+1}\subset\cdots\subset\boldsymbol{G}_\alpha\subset\cdots\cdots \\ \boldsymbol{F}_0\subset\boldsymbol{F}_1\subset\boldsymbol{F}_2\subset\cdots\subset\boldsymbol{F}_\omega\subset\boldsymbol{F}_{\omega+1}\subset\cdots\subset\boldsymbol{F}_\alpha\subset\cdots\cdots \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

これらの族が本当に拡大され各族に固有な集合が存在するかは難問で，上記 $\{x\}$ は開区間列の極限と見れば G_δ でも本来は F だが，代数的数の集合は固有の F_σ である。具体的な存在証明はベールが G_3, F_3 まで与え，その後やっと G_4, F_4 まで達したが，ボレルは各階に固有の B 集合の存在を示すのに，その階までの B 集合の範囲に限定した対角線論法を用いている。

3-2）ベール関数

ベールは実変数関数についてこれと似た分類をした。連続関数（0 階の関数）の族を F_0，連続関数の可算列の極限関数（1 階の関数）の族を F_1，F_1 までの関数の可算列の極限関数族を F_2，$\cdots$とし，その拡張は

第 2 級順序数まで及ぶ。例(たと)えば階数 ω の関数には $F_0, F_1, \cdots, F_n, \cdots\cdots$ から取った関数列の極限関数である。これらをベール関数（B 関数）と呼ぶ。この場合も先へゆくほど関数の様相は複雑になり存在が問題になる。例(たと)えばディレクレ関数（区間 $I=[0,1]$ の有理数 R で 0，無理数 J で 1）はようやく第 2 階である。

B 関数と B 集合の間には，$y=f(x)$ の $y>k$ の原像（また $y=k, k>y \geqq h, y \leqq k$ など原像）は必ず B 集合になり，相互の階数の間にも対応がつくなど密接な関係が見られる。この関係はルベーグが「解析的に表現可能な関数」(1905) の中で整備したことだが，彼はそこで B 関数ではない関数を，（第 2 級順序数全体を Ω として）いわば Ω 階に当たる関数として「解析的に表現」し，また解析集合が Ω 階の B 集合に相当することの発見に繋がったのである（補説 4）。Ω を用いる条件で具体的に指定できる対象をルベーグは「指名 (nommer)」可能と呼んでいる。

3-3）　ルベーグ測度

ルベーグ測度（L 測度）はボレル測度（B 測度）の拡張である。一般に図形 X の測度は X を上下から近似し，両者が極限において一致することで定めるのが常道で，リーマン積分を整理したジョルダンの測度もそうしたが，それは端点以外に共通点のない有限個の可測集合の和集合の測度は各測度の和という「有限加法性」しか持たなかった。ボレルはこれを可算個の和集合に広げよう（「完全加法性」）としたが，上下の近似の点に不足があったのである。

ルベーグは集合 X を覆う区間列 $\{I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots\cdots\}$ について区間の和を取り，あらゆるそのような区間列の長さの和の下限を取って，それを X の外測度と呼ぶ。例(たと)えば区間 $I=(0,1)$ の有理数の集合 R は，大小に関係なく $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\cdots\}$ と並べ，r_n を開区間 $\left(r_n - \dfrac{\varepsilon}{2^n}, r_n + \dfrac{\varepsilon}{2^n}\right)$ で覆えば，覆いの全長は（初項 ε 公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比級数の和）2ε で押さえられるから，R の外測度は 0 である。完全加法性は

例えばこのようにして実現される。

X の内測度は，X を包む有限の区間 I において，（I の測度）−（X^c の外測度）と定義する（X^c は X の I における補集合）。I から X^c の多めの見積りを差し引いて X の下近似にするわけである。外測度，内測度の一致する集合を L 可測集合，一致した値を L 測度と呼ぶ。R の測度の 0，I の無理数 J の測度の 1，またカントルの三進集合[1] の測度 0 はこれで確定し，B 集合が L 可測で，それが B 測度と一致することもここから確かめられる。

L 測度が B 測度と本質的に違うのは，外測度 0 の集合を「零集合」と名付け，具体的構造に関係なく一律に可測とした点にある。零集合のボレル的構造の一般論は先ず不可能で，零集合はボレルの手を洩れた怪物を一括して閉じこめたお化け屋敷と言ってよい。おかげで B 集合の族としての濃度は $\aleph$ なのに，L 可測集合族の濃度は $2^{\aleph}$ になる。事実，B 集合に或る零集合を加え，また引いたものは L 可測だが，必ずしも B 集合にならない。

ルベーグは零集合が積分論その他において実際上の影響をもたないことから，それを無視して考えることを「ほとんど到るところで」と巧みに表現し，理論を透明にしたのみでなく，実際上の効果も上げたのである。

3-4) ルベーグ積分

元来，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ とは縦線図形 ($y = f(x)$，二直線 $x = a$, $x = b$, 横軸の囲む図形) の測度のことだから，リーマン積分不能でもルベーグ測度の下では積分可能になるものがある。リーマン積分では先ず定義区間を有限個の小区間に分割するため，関数のグラフの複雑さは区間分割でも解消されずに残るが，ルベーグ積分では縦軸を先に分割し，各

1) 「カントルにおける数学と哲学」(『数学と哲学との間』玉川学園出版部) 所収。PDF 版は「科学図書館」に収録。http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/cantor-math-utf.pdf

小区間に落ちる関数値の原像の測度に高さを掛けて上下の近似をするので，グラフの複雑さは定義区間の分割に反映するものの，関数の原像が L 可測なら積分可能になる。

縦軸のどの分割によってもその原像が常に L 可測になる関数を可測関数という。3–2) で示唆したように，B 関数は必ず可測関数である。例(たと)えばディィリクレ関数は，リーマン積分では I のどの有限区間分割でも上近似は 1，下近似は 0 で一致しないが，ルベーグ積分では，$1-\varepsilon<y<1+\varepsilon$ の y の原像は J で測度 1，y の分割で 1 を含まぬ区間の原像は空集合か R で測度は 0 のため，積分の下近似は $1-\varepsilon'$，上近似は $1+\varepsilon'$ で，積分は 1 となる。

3-5)　ルベーグ非可測集合

ルベーグ非可測集合の存在証明は選択公理を使えば得られるが，指名可能な範囲では得られなかった。ルベーグは非可測集合が自分の理論の範囲外に落ちることに満足したと言われるが，今日この不可能性と解される結果が公理的集合論の中で得られている (Solovay，1970)。

区間 $I=[0,1]$ 上の非可測集合を，イタリアのヴィタリ (Vitali) に従って作ってみよう。区間 I の両端を重ねた円を例(たと)えば円い茶筒の口と蓋と見て，有理数を単純列 $R=\{0, r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\cdots\}$ にならべた目盛りを缶の口と蓋に打つ。次に無理数 x_1 を取り，蓋の 0 を口の x_1 の位置に回し，蓋の R を口に移して x_1+r (r は R の元) を R_1 とする。残る無理数から x_2 を取り，以下同様に続ける。無理数の非可算性からこの操作は連続の濃度だけ続けられ，区間 I はそれぞれが R と合同だが重ならない非可算個の集合，

$$R_0(=R),\ R_1,\ R_2,\cdots,\ R_\alpha,\cdots,\ R_\beta,\cdots,\quad (R_\alpha\text{は }x_\alpha+r\text{ の集合}) \qquad (1)$$

に完全に分解される。R_α と R_β に共通点がないことは缶の蓋を回して見れば容易に分かる。この (1) に選択公理を使うと一つの非可算点列

$$V=\{y_0,\ y_1,\ y_2,\cdots,\ y_\alpha,\ y_\beta,\cdots\cdots\}\ (y_\alpha\in R_\alpha) \qquad (2)$$

が得られるが，この V は（改めて蓋に V，口に R を打点し，V の元 y_0 を R の各点に回すと分かるように）I を可算個の合同な部分集合に分けている。

しかし V は L 可測でありえない。実際，可測で測度 $\mu(0 \leqq \mu \leqq 1)$ と仮定すれば，完全加法性によって $\mu = 0$ なら I の測度は 0，$\mu > 0$ なら ∞ となり，いずれにしても I の測度が 1 であることと矛盾する。

補説 4　解析集合と射影集合

4-1)　解析集合の発見

解析集合は（G_δ 以上の）平面ボレル集合の座標軸への射影として得られる集合である。この発見には面白い話がある。ルベーグは「解析的に表現可能な関数」（1905）で B 集合と B 関数の理論を整理し，B 関数でない関数を「指名」した時，目的の関数は得られたものの，一つの誤りを冒して解析集合の発見を逃した。原因は「平面 B 集合の共通部分の射影は，各集合の射影の共通部分である」を「定理」として，わずか三行余り（三下(みくだ)り半!?）で「証明」したことである。その誤りは後から見ると比較的簡単な見落しだったが，ルベーグは，共通部分を和集合とした定理が正しいのに引きずられたのであろう。珍しいことにこれは十二年も見逃され，1917 年にロシアのルージン教授の学生だったススリンが指摘した。B 集合の拡張たる解析集合，そのまた拡張たる射影集合の理論はここに始まる。

ススリンは夭折(ようせつ)したが，B 集合の射影はルージン，シールピンスキイ達のポーランド学派などの人々によって多くのことが明らかにされた：

(1)　解析集合は区間の無理点全体の連続像で，節による集合とも同値，

(2)　非可算の解析集合の濃度は $\aleph$，

(3)　解析集合はルベーグ可測，

(4)　解析集合はベールの性質（或る開集合に適当な第 1 類集合（疎集合の可算和）を加減して表される）を持つ，

はその主なもので，特に非可算 B 集合の濃度は少し前にやっと解けた難問だったのが，(1) から直ちに分かることになった。

4-2)　ルベーグ・ルージンの篩

「篩（ふるい）」とは，ルベーグがベール関数でない関数を「指名」した時に工夫（くふう）し，ルージンが利用した方法で，これは，第 2 級順序数の全体を或る程度「見る」ことのできるほとんど唯一の方法であろうと思われる。

xy 平面に単位正方形を取り，y 軸上の有理点を単純列

$$R = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\cdots\}$$

に並べて固定する。x 軸に平行な各線分 $y = r_n$ を 2^n 等分して，小区間を左から一つおきに消す。これがルベーグ・ルージンの篩（ふるい）である。

便宜上，x 軸では無理点だけを考えることとし，$x = a$ で篩（ふるい）を切ると R の部分集合と交わるが，大小順で見るその切口は可算順序型になる。また R は稠密（ちゅうみつ）可算集合だから，可算順序型は必ずどこかの切り口に現れる。実際，順序型 γ を切り出すには，R の部分列で γ 型になる

$$\{r_{i_1}, r_{i_2}, \cdots, r_{i_n}, \cdots\cdots\}$$

を取り，その添え数に当たる小区間の下に来る a を取ればよい。それは a の二進小数展開に相当するからである。ただし R からの γ 型の部分列の取り方は一意ではないから，γ に対しては集合 X_γ が得られる。今，γ が順序数 α である時を B_α，非整列の時を A と書けば，A は B 集合でない解析集合，各 B_α は B 集合になる。また A の補集合 CA は $\aleph_1$ 個の B_α の和集合で補解析集合と呼ばれ，B 集合でも解析集合でもない新しい型の集合，B 集合族は解析集合族と補解析集合族の共通部分である。（B 関数でないが表現可能な関数は，別に z 軸を取り，x 軸上の B_α の各点 p に平面 $x = p$ を立ててその平面上に階数 α の B 関数を描き，他は $y = 0$, $z = 0$ とした xz 面上の関数を作るとき，その関数のグラフと対角線平面 $x = z$ との切断面の交わりを取り，各点を食い違わせた関数として得られる。）

この篩（ふるい）以外にも，平面 B 集合は類似の判定条件によって篩（ふるい）として用いられるが，或る篩（ふるい）によって或る添え数以上の B_α が全て空となる場合には A も CA も B 集合になる。実は A の各点 x の切口にも或る順序数 β が対応して A も $\aleph_1$ 個の B 集合 A_β に分解でき，連続体の $\aleph_1$ 分解を得て連続体仮説の解決も期待されたが，他方それと両立せぬルージンの連続体仮説（濃度 $\aleph_1$ の集合は常に CA）も生まれた。しかし今日の公理的集合論では両仮説のどれにもその成立を支えるモデルのあることが知られている。

4-3)　射影集合

ルージンは更に A を P_1，CA を C_1 と書き，C_1 の連続像（元来は $n+1$ 次元の C_1 の n 次元への射影；射影は連続写像）を P_2，P_2 の補集合を C_2，C_2 の連続像を P_3, …… とし，それらの新しい集合族を射影集合と名付けた。これらは，補説 3–1) の階層 (8a) (p.21) に似た階層 (b) を作る。族を太字で示すと，

$$\boldsymbol{B}\subset\begin{cases}\boldsymbol{P}_1\subset\boldsymbol{P}_2\subset\cdots\subset\boldsymbol{P}_n\subset\cdots\cdots\\ \boldsymbol{C}_1\subset\boldsymbol{C}_2\subset\cdots\subset\boldsymbol{C}_n\subset\cdots\cdots\end{cases}\qquad \boldsymbol{B}(=\boldsymbol{P}_1\cap\boldsymbol{C}_1)\text{ はボレル集合族）}\quad\text{(b)}$$

この内 $\boldsymbol{A}$ 従って $\boldsymbol{B}$ の元たる集合 A, B の濃度は可算か $\aleph$ かで，ここまでの集合族は連続体仮説の成立する世界だが，$\boldsymbol{C}_1$ の元 C_1 からは濃度不明，C_1 は A の補集合としてルベーグ可測だが，$\boldsymbol{P}_2$ の元 P_2 から先はこれも不明である。この状況をルージンは「永久に解けまい」と書いたが，公理的集合論の中ではいくつかが解決されている。

一方，これらの集合族の族としての濃度は（加算個の基本区間から可算的手続きで得られるものであるため）全て $\aleph$ で，射影集合でない点集合（族としての濃度は $2^\aleph$）は常に存在する。こうした次第で，私は「ボレルのエフェクチフの概念の形成[1]」で effectif のニュアンスを「果ては混沌の中に消えてゆく感すらある」と書いたが，可算の範囲でも無限

1)『数学と哲学との間』（玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」に収録 `http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/borel-effectif-utf.pdf`

は依然として謎なのである。

4-4)　一価化問題

一価化問題とは，例(たと)えば平面点集合 A の x 軸への射影が区間 $[0, 1]$ の時，各 x 上に一点を定めてその上の一価関数 $f(x)$ を作る問題で，発端は「五つの手紙[1]」の中でアダマールの提起したものである。選択公理を使えば $f'(x)$ はそれこそ選り取り見取りで得られるが，元来，関数とは各 x に対する値を一挙に規定する法則と見られていたのに対し，こちらは無数の x にそれぞれ値を与えて全体に及ぶというので事が紛糾したのである。A が簡単な図形ならともかく，平面 G_δ 以上のボレル集合の一般的な一価化は解析集合でもできず，補解析集合を要することが示された（ルージン，1930）。

これを大きく発展させたのは近藤基吉で，彼は「平面上の CA は CA で一価化可能」（1937，近藤の一価化定理）を示した。この定理からは平面上の P_2 も P_2 で一価化可能なこと（同論文）を始め，一次元非可算の P_2 が完全集合（濃度 $\aleph$）を包むか否か，一次元 P_2 で濃度 $\aleph_1$ のものがあるか否かは，P_2 を C_1 に置き換えた各命題とそれぞれ同値である等，いくつかの定理が得られるが，射影集合に関する積極的な結果は全て近藤の定理から得られていると言っても過言ではない。この一価化定理は帰納的関数の階層理論（附録 2）でも重要であるのに，この定理が世に認められたのは 1950 年代半ばである（補説 1 参照）。

（原型 1955）

1) 「ボレルのエフェクチフ概念の形成」（『数学と哲学との間』玉川大学出版会）所収。PDF 版は「科学図書館」に収録 http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/borel-effectif-utf.pdf

付録1　ゲーデルの決定不能定理

これはゲーデルの原論文 “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I” (*Monatshefte* 38, 1931) を，原文に即して解説したものである。決定不能定理とは

「形式化された理論体系で自然数論が展開できるだけの広さを持つ S が無矛盾(実はやや強く ‘ω–無矛盾’) である場合，S の中の自然数の命題 $\boldsymbol{R}$ で，S の公理からは ‘$\boldsymbol{R}$’ も **‘$\boldsymbol{R}$ の否定’** も導き出せぬものが存在する。」

この $\boldsymbol{R}$ が決定不能な命題である。(ω–無矛盾は下で説明する，なおこの定理は後に無矛盾の仮定だけで証明された。) 以下，証明の大綱を示す。

(1°) S の公理系は，そこで使われる論理法則を含めて高々(たかだか)可算個の基本記号のみで書かれている。例えば **0**［零］，$\boldsymbol{f}$［の後者］，$=$［等号］，$\neg$［否定］，$\supset$［ならば」，$\wedge$［かつ］，$\forall$［全称］，**(**，**)**［括弧］，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\cdots$［1 階の変数」：$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\cdots$；$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\cdots\cdots$ 等の［n 階の変数］を用いる。以下では n 階の変数の件には触れないでおく。このあと **太字の記号と細字の記号との区別**が微妙なので注意されたい。

これらの基本記号を別個の奇数で置き換えても混乱は生じない (基本記号のゲーデル数)。例えば **0** を 1；$\boldsymbol{f}$ を 3；$=$ を 5；$\neg$ を 7；$\supset$ を 9；$\wedge$ を 11；$\forall$ を 13；**(**, **)** を 15，17；$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\cdots$ を 19 以下の素数，(n 階の変数は 19^n，…など) と表示する。例えば数 3 は **0** の後者の後者の後者で，S では $\boldsymbol{fff}$ **0** または 3, 3, 3, 1 と書かれる。

これは，S の外に普通の整数論 T を取り，S のメタ概念を T の数論で表現し，後に後者を S の中に翻訳するための準備である。翻訳のためには T の基本概念も S に翻訳できるものであることが望ましい。(このゲーデル数は便宜上，原論文と少し変えた。**太字**は S の対象の意味だが，(4°) 以後は複雑になりすぎることがあるので，用いなかった場合がある。)

(2°) S の記号列には，各記号のゲーデル数の列 g_1, g_2, $\cdots$, g_n に対して，数 $2^{g_1}\cdot 3^{g_2}\cdot 5^{g3}\cdot\cdots\cdot p_n^{g_n}$ を対応させる（記号列のゲーデル数）。ただし p_n は n 番目の素数。この対応は一対一であり，ゲーデル数からの復元も可能である。**3** つまり $\boldsymbol{fff\ 0}$ のゲーデル数 $Z(3)$ は $2^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^1$，また命題 $\boldsymbol{x=y}$ のゲーデル数は $2^{15}\cdot 3^{19}\cdot 5^5\cdot 7^{23}\cdot 11^{17}$（以下，$A$ と略記）である。

命題の列(例えば「証明」)には，各命題のゲーデル数の列 h_1, h_2, $\cdots$, h_m に対して $2^{h_1}\cdot 3^{h_2}\cdot 5^{h_3}\cdot\cdots\cdot p_m^{h_m}$ を対応させる（命題列のゲーデル数)。この対応も一対一である。例えば命題列‘$\boldsymbol{x=y\ x=y}$’のゲーデル数は $2^A\cdot 3^A$ である。

自然数の各々は素因数分解によって，基本記号のゲーデル数か，基本記号列のゲーデル数か，そのどれでもないか——これが大多数——が分かる。

(3°) 以上の手続きによって，公理系での論理的推論などもゲーデル数に関する比較的簡単な計算，**原始帰納的関数**（primitive recursive function; p. r. f. と略）よる計算で置き換えられる。p. r. f. とは，自然数論に即して数学的帰納法的に定義される関数で，与えられた変数値に対する関数値は必ず有限回の手続きの繰り返しで計算できるのが特徴である。また自然数間の関係 $R(x, y)$ は，その真偽の判定が或る p. r. f. で置き換えられるとき（真は 0，偽は 1），原始帰納的関係 (p. r. r.) と呼ばれる［付録 2 参照］。

S のメタ的関係の中には p. r. f. で表されるものがある。例えば

(a)　“「命題列」x は「命題」y の「証明」である”（記号：$x\,B\,y$）は，「命題列」x の冪(べき)指数が全て「公理」か「それ以前に得た命題から導出できる命題」かで，最後の冪(べき)指数が「命題」y である時に真，それ以外は偽であるが，その間の計算は全て p. r. f. で済む。例えば「公理」とは，公理に当たるゲーデル数の集合であり，n が「公理」か否

かは，n がその集合に属するか否かで判定される。「既得の命題から導出できる命題」なども同様で，それらはいずれも p. r. f. によって判定される。

要するに，ここで「　」で示した類の，S に関する一連のメタ概念は T における初等整数論の中で原始帰納的に計算，或いは判定されるのである。

(4°) 関係 $R(x_1, \cdots, x_n)$ が原始帰納的だとすると，変数値に対する (T での) 真偽は有限的に判定されるから，その検証過程は (メタ概念も含めて) p. r. f. によるゲーデル数の算術に書き換えられるが，R を再び形式的体系 S に移した上，更にそれを T に戻したものを r とすると，T における R の「真」，「偽」は S において「r の証明可能」，「r の否定の証明可能」で置き換えられる。うっかりすると R の真を「証明可能」に，偽を「証明不能」にしかねぬことだが，以下見るように，この一連の手続きこそ，この壮大な天才的仕事の第一歩であり，p. r. f. による計算や判定の具体的有限性が大きく利いている。実際，R の偽は「R が証明可能ということの否定」ではなく，これを「R の否定が**証明可能**」として，r を作ることができるのである (なお「数学史における逆説の役割[1)]」6–1，6–2 節を参照) 。二変数の形で詳しく言えば，

> 「原始帰納的な $R(x_1, x_2)$ に対して「関係」r，変数 x_1, x_2 に対して「自由変数」19，23 が存在し，x_1, x_2 の各々の値 a_1, a_2 に関して次の式が成り立つ。（後の利用のため (1) の方に $\overline{\quad}$ を付けた。）
>
> (1)　$\overline{R(a_1, a_2)} \to Bew[Sb\, r\binom{19 \quad 23}{z(a_1) \quad z(a_2)}]$
>
> (2)　$R(a_1, a_2) \to Bew[Neg\big(Sb\, r\binom{19 \quad 23}{z(a_1) \quad z(a_2)}\big)]$

なお $Z(a_1)$ は a_1 の上記のゲーデル数，Sb は「代入」という操作のゲーデル数によるメタ演算で，例えば $Sb\, r\binom{19}{z(3)}$ は，r の冪(べき)指数である「命

1) 『数学と哲学との間』玉川大学出版部所収。PDF 版は「科学図書館」`http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/role-paradox-utf.pdf` に収録

題」の各々に現れた「自由変数」19 を，$Z(3)$ に対する $2^3\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7^1$ で置き換え，以後の冪（べき）指数を先送りにずらす操作，$Neg\ A$ は「A の否定」(を示すゲーデル数) で，否定記号 $\neg$ のゲーデル数 7 を 2^7 の形で先置して，後続のゲーデル数 A の冪（べき）指数を順にずらす操作である。この種のことはいずれも原始帰納的関数で計算できる。

(5°) ところが“命題 z は証明可能である”という述語（関係）は

(b) “xBz なる「命題列」x が存在する”（記号：$Bew(z)$)

と解されるが，z に対して吟味すべき x の範囲が限定されず，p. r. f. で処理できる有限的範囲を超える。（この判定は「x が存在する」との仮定で行われ，その過程で p. r. f. の具体性を少し弱めた一般帰納的関係（g. r. f.；付録 2 参照）が用いられる。）

ゲーデルは先ず，

“S から ‘$a(Z(n))$ for all n’ が得られるならば，S から $\forall v\, a(v)$ も得られる”

を望みたいが，それでは強すぎる (ω–rule を要請することになる) ので，せめて $\neg\forall v\, a(v)$ は証明できないとする。即ち数 1, 2, …… をそのニュメラルで置き換えるとき，

(**c**) “$a(\mathbf{1}), a(\mathbf{2}), \cdots, a(\boldsymbol{n}), \cdots\cdots$ がすべて導ける一方で，$\neg\forall v\ a(v)$ [即ち $Neg(v\, Gen\, a)$] も導かれるようなことはない”（ω–無矛盾）

という条件の下で S を拡大して S_k と呼ぶ。（ω–無矛盾は，ラッセルの無限列車の逆理，各客車はいつかは動くが，全体は動くのか動かないのかに対して，その隙間を衝くような条件である。）こうして彼は

“S_k において原始帰納的な述語 r で，$v\, Gen\, r$ も，$Neg(v\, Gen\, r)$ も S_k では導出できないものが存在する”

ことを証明する。Gen は S での $\forall$ (ゲーデル数 13) に対応する「全称記号」。この $v\, Gen\, r$ が決定不能の命題で，r を定めるのがゲーデルの工夫である。

(6°) 決定不能定理の証明はほぼ次の通りである。

先ず数 $x,\, y$ の関係 $Q(x,\, y)$ として

“x は $Sb(y\binom{23}{z(y)})$ の S_k での証明ではない” 即ち $\overline{xB_k[Sb(y\binom{23}{z(y)})]}$ を作る（B_k は ‘S_k における B’ の意味)。平たく言うと“「命題列」x は,「命題」y に（y 自身でなく）$Z(y)$ を「代入」した結果についての「証明」ではない”ということだが，(4°) により，Q に対応する「関係」q（「自由変数」19，23）が取れ，(1)，(2) から

$$(3)\qquad \overline{x\,B_k[Sb(y\binom{23}{z(y)})]} \rightarrow Bew_k[Sb(q\binom{19\quad 23}{z(x)\quad z(y)})],$$

$$(4)\qquad x\,B_k[Sb(y\binom{23}{z(y)})] \rightarrow Bew_k[Neg(Sb(q\binom{19\quad 23}{z(x)\quad z(y)}))].$$

が得られる。q は $[Sb(y\binom{23}{z(y)})]$ に到る「証明過程」を基に作られるが，左辺での $Sb(y\binom{23}{z(y)})$ の不成立は，右辺では $Sb(q\binom{19\quad 23}{z(x)\quad z(y)})$ の「肯定の証明」，その成立は右辺では「否定の証明」とあべこべになっている。これがこのあと利(き)いてくる。

ここで $p = 19\,Gen\,q$ とおくと p は確定する。そこで p の「自由変数」23 に $\boldsymbol{Z}(p)$ を「代入」する。手取(てっとり)り早く言えば，p 番目の命題 $19\,Gen\,q$ の自由変数に $\boldsymbol{Z}(p)$ を代入するのだが，p は厖大(ぼうだい)だが確定した自然数なので混乱の生ずる余地はない。（もっとも S と T とを往復する内に，これらの数はどんどん巨大になる。）

今 $r = Sb(q\binom{23}{z(p)})$（$r$ の「自由変数」は 19）と略記し，p を (3)，(4) の y に入れると，(3) は

$$\overline{x\,B_k\,Sb(p\binom{23}{z(p)})} \rightarrow Bew_k[Sb(q\binom{19\quad 23}{z(x)\quad z(p)})]$$

だが，左辺の Sb は $Sb(19\,Gen\,q\binom{23}{z(p)})$ を経て $19\,Gen\,r$ となり，右辺の $Sb(q\binom{19\quad 23}{z(x)\quad z(p)})$ は $Sb(r\binom{19}{z(x)})$ となる。(4) も同様で，結局，

$$(5)\qquad \overline{x\,B_k(19\,Gen\,r)} \rightarrow Bew_k[Sb(r\binom{19}{z(x)})]$$

$$(6)\qquad x\,B_k(19\,Gen\,r) \rightarrow Bew_k[Neg(Sb(r\binom{19}{z(x)}))]$$

が得られ，$(19\,Gen\,r)$ が求める不確定な命題になる。これを大雑把(おおざっぱ)に言えば，(5) は，x が $(19\,Gen\,r)$ の「証明」でないとき，x のニュメラ

ル $\boldsymbol{Z}(x)$ を r の「証明列」用の自由変数 19 に「代入」すると，q での「最終命題」として $19\,Gen\,q(=p)$ に対応する $r = Sb(q\binom{23}{z(q)})$ が「証明」できること，（6）はあべこべに，前者が「証明」であるときには，同様の手続きによって「最終命題の否定」が「証明」できることという，ちぐはぐな状況を示している。

今，もし $19\,Gen\,r$ が S_k で証明されたとすると，(6) の左辺の x があるはずで $Neg(Sb(r^{19}_{z(x)})))$ が証明できることになる一方，Gen の性質によって $Sb(r\binom{19}{z(x)})$ も証明されて矛盾になる。他方，$19\,Gen\,r$ が証明できない以上，「どの n に対しても $(n\,B_k(19\,Gen\,r))$ の否定」が成り立つが，（5）によって「どの n に対しても $Bew_k[Sb(r\binom{19}{z(n)})]$」となるので，$\omega$–無矛盾の条件と矛盾する。即ち $19\,Gen\,r$ は，S_k では証明もできず，否定の証明もできない命題である。

これはリシャールの逆理に似た状況だが,「証明過程」のような一連のメタの考察を，理論の対象である自然数と，それらの数を用いて表現された対象を外部から数えるときの数(実はニュメラル) $\boldsymbol{Z}(\quad)$ とを峻別するなどの手段で逆理は回避されている。その代わり，q，p，$\boldsymbol{Z}(p)$ を始め，ここに現れるゲーデル数は気の遠くなるほど厖大になり，加えて S と T とを往復しなくてはならないから，この話はなかなか難しい。しかしよく検討すると明快であり，メタ数学的考察の一典型として，しかも初めて公理的数学の限界を示した点で，その後の基礎論への影響は巨大である。それだけでなく，この定理は論理的言語の本質の吟味に大きな意味をもっている。

次にその最初の結果として，彼がこの論文の最後に示したほぼ次のようなメタ定理が挙げられる。

“自然数論 P が無矛盾 (widerspruchsfrei) である場合，「P が無矛盾である」ということは P の中で証明できない”

“P を含む任意の体系 S_k (例：集合論の公理系 Σ :「カントルにおけ

る数学と哲学[1]」補説）が無矛盾の場合，「S_k が無矛盾である」ことを示す「命題」（これは S_k の論理式として表現できる）は，S_k において「証明可能」ではない”

平たく言えば，これは，「どんな弁護士も自分の関わる訴訟事件の弁護をすることはできない」というようなことを，然(しか)るべき条件の下で精密に検討した結果としてよい。ただ，それが並大抵(なみたいてい)の仕事ではなかったのである。

証明は上記の関係 $Q(x, y)$ の以下の議論と同様の形で進められる。詳細は略すが，もし「S_k が無矛盾」ということを表す「命題」w が，S_k で「証明可能」であると仮定すると，上の議論によって

$\overline{Bew_k}(19\,Gen\,r)$.

一方，「命題」

$w\,Imp(19\,Gen\,r)$

（Imp は S での $\supset$ に対応する「ならば」の記号，r は前ページの r）

も S_k で「証明可能」となり，そこから $(19\,Gen\,r)$ の「証明可能」，即ち，

$Bew_k(19\,Gen\,r)$

もまた得られることになる。これは不合理だから，このような w は S_k では証明可能ではない。

［**付記**］ここで示したのは，普通の意味での自然数の全体 N の中に「公理的自然数論の可算モデル」が作られる事情だが，実はこれと似た仕方で実数論や集合論の公理的理論の可算モデルも作りうる。

N の公理的理論の一切が N の中に作られるというのは逆説的な話だが，それが矛盾なく作られるのは上記の通りで，しかもそれは実際上ゲーデル数という特殊な形の自然数だけでできている。言いかえれば，N に

1) 『数学と哲学との間』（玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」`http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/cantor-math-utf.pdf` に収録

はなお無数の自然数が残っているのである。

「数学における無限と有限の弁証法[1]」で集合論 ZF (「カントルにおける数学と哲学[2]」補説 3) を用いるコーヘン・モデルについて触れたが，種々の特異な「集合論」のモデルが作られるのは，それら「残る無数の」自然数が利用できるからである。「数学史における逆説の役割[3]」補説 2 も併せて参照されたい。

1) 『数学と哲学との間』玉川大学出版部，所収。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/math-inf-finite-utf.pdf に収録
2) 『数学と哲学との間』玉川大学出版部，所収。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/cantor-math-utf.pdf に収録
3) 『数学と哲学との間』玉川大学出版部、所収。PDF 版は「科学図書館」http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/role-paradox-utf.pdf に収録

付録2　帰納的関数と帰納的述語

(a)　原始帰納的関数・原始帰納的述語

原始帰納的関数 (primitive recursive function；p. r. f と略) は数論的関数(定義域も値域も自然数)の一種で, その原型はデデキンドの『数とは何か』の「§9 の帰納法 (Induktion) による写像」にある。本来 'recursive' は「回帰」「繰り返し」の意味だが, 内容的にはデデキント的「帰納 (induction)」と同義である。また 'primitive' は 'general' に対して本来は,「元々の」というぐらいの意味であろう.

p. r. f. は次の五つの手続きを有限回繰り返して得られる関数である。

(1)　x の後者 x' をとる関数：$F'(x) = x'$

(2)　定数 q を取る n 変数関数：$F^2_{n,q}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = q$

(3)　変数の中から 1 個を取る n 変数関数：$F^3_{n,k}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_k$

から出発し,

(4)　代入：例えば，既得の p. r. f. $X(_1, x_2)$ に

$$\text{p. r. f. } Y(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ Z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

を代入する：

$$X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X(Y(x_1, x_2, \cdots, x_n), Z(x_1, x_2, \cdots, x_n)),$$

(5)　帰納的手続き：既得の p. r. f. $X(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $Y(y, z, x_1, \cdots, x_n)$ とから，次の関数 $Z(y, x_1, \cdots, x_n)$ を得る手続き

$$\begin{cases} Z(0, x_1, \cdots, x_n) = X(x_1, \cdots, x_n) \\ Z(y', x_1, \cdots, x_n) = Y(y, Z(y, x_1, \cdots, x_n), x_1, \cdots, x_n), \end{cases}$$

要するに $Z(y', x)$ を，直前に得た関数値 $Z(y, x)$ (と x や y) から既得の関数 $Y(y, z, x)$ によって定めることである。

例えば加法 $x + y(= f(y, x))$ は下記の通りだが，やや略記してある。

$x + 0 = x$　　　　$(f(0, x) = F^3_{1,1}(x) = x)$,

$x + y' = (x + y)'$　$(f(y', x) = F'(F^3_{3,2}(y, f(y, x), x)) = (x + y'))$

として, また乗法 $x \cdot y(= g(y, x))$ は, 加法 $f'(y, x)$ を用いて,

$$x \cdot 0 = 0 \qquad (g(0, x) = F^2_{1,0}(x) = 0),$$
$$x \cdot y' = x \cdot y + x \qquad (g(y', x) = f(g(y, x), x))$$

として、p. r. f. である。

束縛変数のない命題関数 $A(x, y)$ についても，変数 x, y が自然数であれば（真の時は 0, 偽の時は 1 をとる）表現関数は p. r. f. になる。例えば否定 (not)，選言 (or) の表現関数は次の $n(x)$, $p(x, y)$ で与えられる。

$n(x)$：$n(0) = 1$，$x \neq 0$ の時は $n(x) = 0$.

$p(x, y)$：$p(0, y) = p(x, 0) = 0$，x も y も 0 でない時は $p(x, y) = 1$.

両立 (and)，含意 (if, then) の表現関数もこれで表現できる。'x and y' の表現関数は $n(p[n(x), n(y)])$ である。

また数の相等に対応する表現関数 $q(x, y)$ も p. r. f. である。

$q(x, y)$：$x = y$ の時は $q(x, y) = 0$，$x \neq y$ の時は $q(x, y) = 1$

数の不等 $x < y$ は $(\exists z)[x + z' = y]$ だが,$(\exists z)$ を使わなくともすむ：「$x+0' = y$ or $x+0'' = y$ or $\cdots$ or $x+0''^{\cdots\prime} = y$ ($''^{\cdots\prime}$の個数は $y - x$ 個)」

一般に束縛変数のある命題 $(\exists x)R(x, y)$, $(\forall x)R(x, y)$ も，不等性の場合と同様，x を検査する範囲が（y で定まる p. r. f. によって押さえられる）有限範囲である限り，真偽関数が p. r. f. になることが確かめられる。

表現関数が p. r. f. で表される命題は原始帰納的述語 (p. r. p.) と呼ばれるが, 数論の多くの関数や命題は p. r. f. の範囲で論じられ，ゲーデルの決定不能定理（附録 1）で重要な役割をする。

(b)　一般帰納的関数・一般帰納的述語・チャーチの提言

一般帰納的関数（general recursive function：g. r. f. と略）は p. r. f. の条件 (1)—(5) に次の (6) による $f(x)$ の定義を加えたもので，$F(x, y)$ は既得の関数，$\mu y R(y)$ は，$R(y)$ を満たす y が存在すればその最小値，さ

もなければ 0 をとる関数とする。x は一般には $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の形でよい。

(6)　$(\forall x)(\exists y)(F(x, y)=0)$ の時に限り $f(x)=\mu y(F(x, y)=0)$

要するに p. r. f. の与える具体的計算を具体性のやや弱い作用素 μy によって拡張したのが g. r. f. であり，g. r. f. を表現関数とする述語を一般帰納的述語 (g. r. p.) と呼ぶ。（本格的な説明は成書，, 例えば Kleelle, *Introduction to Metamathematics* (1952) などをご覧頂きたい。）

チャーチの提言は，ボレル以来種々問題のあった ‘effectif’ の概念について,「エフェクチヴに計算可能な関数」とは g. r. f. のことと考えようという提言である。勿論（もちろん）これは証明すべくもない主張だが，多くの実例によって妥当と考えられている。有限的に計算可能あるいは決定可能の範囲をこの辺に見定めたのが，チャーチの提言の真意であり手柄である。

次にゲーデルの証明で，p. r. f. では収まらないところを実例によって示そう。ここで論理式はゲーデル数 (付録 1) で表現されているとする。即ち，基本記号を自然数 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ で置き換えた上で、記号列たる論理式 $(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n})$ には自然数

$$k=2^{a_{i_1}}\cdot 3^{a_{i_2}}\cdot\cdots\cdot p_n^{a_n}\ (p_n\text{は } n \text{ 番目の素数})$$

が，また論理式の列 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ には自然数

$$j=2^{k_1}\cdot 3^{k_2}\ \cdot\cdots\cdot p_m^{k_m}$$

が対応し，式の数表現もその逆表現も常に一意的に可能であるとする。

(例 1)　「x は y を割り切る」という命題

$$A(x, y)=(\exists n)[n<y\,\&\,n\cdot x=y]$$

の表現関数 $a(x, y)$ は p. r. f. であり, $A(x, y)$ は原始帰納的述語 p. r. p. である。実際、[　] 内の条件で，$n<y$，&，$n\cdot y$，$=$ はいずれも p. r. f. で表現でき，n を探す範囲は y までてよい。それによって，$A(3, 5)$ に対

しては $a(3,5)=1$，$A(3,6)$ に対しては $a(3,6)=0$ となる p. r. f. が得られるわけである。

(例 2)　「x は素数である」という命題

$$B(x)=(\forall n)[1<n<x\to not A(n,x)]$$

の表現関数 $b(x)$ も p. r. f. である。

念のために繰り返すと，上の $A(x,y)$，$B(x)$ で $(\exists n)$，$(\forall n)$ の n を [　] 内の式で探すのに，$(\exists n)$ においては&，$(\forall n)$ においては $\to$ の形で, $n<y$ や $1<n<x$ によって有限範囲に押さえられているのが重要で，この条件が表現関数 $a(x,y)$，$b(c)$ が p. r. f. になる決定的な条件なのである。

(例 3)　「命題列 Y は命題 X の証明である」という命題 $C(X,Y)$ では, X, Y を表わすゲーデル数 x, y は極度に巨大になるが，, 彼はそれでもそれらの探索範囲が有限に止まることを示して，その特性関数 $C(x,y)$ を p. r. f. の形で得た。即ち $C(X,Y)$ も p. r. p. である。ところが

(例 4)　「命題 X にはその証明たる命題列 Y が存在する」という命題 $D(X)$ の表現関数 $d(x)$ は「$(\exists y)c(x,y)$ となる最小の y」とまでは書けるが,「命題 X」が証明不能の場合もあるため，y を探すべき限界 $z(>y)$ の定めようがなく，$d(x)$ は有限性を本領とする p. r. f. になってくれない。

(c)　階層の理論

前にボレル集合，解析集合，射影集合その他には，種々のニュアンスや不透明さが現れることを見たが，チャーチの提言を容れると事は大幅に明確になり，少なくとも理論的骨組みに関する限り，多くの問題や予想が肯定あるいは否定されている。特にボレル集合や射影集合に現れた階層的構造 (「フランス経験主義の数学思想[1]」補説 3，4 参照) は

1) 『数学と哲学との間』（玉川大学出版部）所収。PDF 版は「科学図書館」http:

帰納的関数の基盤の上で，クリーネその他の人々によって極めて整った「階層の理論」に発展している。

算術的述語とは，g. r. f. $R(a)$, $R(a,\,x)$, $R(a,\,x,\,y)$，…から出発して，等号，普通の論理演算（変数 x, y, … は自然数の範囲に限定し，$(\exists\,x)$，$(\forall\,x)$ を許す）を有限回施して得られる述語を言う。このとき $(\exists\,x)(\exists\,y)\cdots$ のように同種の限定記号が並んだ場合は一つの $(\exists *)$ の形に直せるので，それらは

$$R(a),\quad \begin{matrix} (\exists\,x)R(a,\,x), & (\exists\,x)(\forall\,y)R(a,\,x,\,y),\cdots\cdots \\ (\forall\,x)R(a,\,x), & (\forall\,x)(\exists\,y)R(a,\,x,\,y),\cdots\cdots \end{matrix} \tag{1}$$

に整理され，右へ行くほど広範な述語群になることが分かる。(1) において k 個の限定記号を持ち，$(\exists *)$ が先頭に来るものを $\sum_k^0$ または $\sum_k$，$(\forall *)$ が先頭に来るものを $\prod_k^0$ または $\prod_k$ とすると，g. r. p. は $\sum_1 \cap \prod_1$ となるが，これは射影集合論において，ボレル集合族が $\boldsymbol{P}_1 \cap \boldsymbol{C}_1$ に一致するのと対応し，全体として「フランス経験主義の数学思想」の補説 3〜5 における階層と対応する。$\sum^0$ や $\prod^0$ の上付の ^{0} は，算術的述語を，より広い解析的述語（自然数とともに，自然数から自然数への関数，つまり実数 a, b,…… をも変数とし $(\exists a)$，$(\forall a)$ などを許すもの）について $\sum_k^1$，$\prod_k^1$ があるからだが，ここでは省略する。

ともかくこれらの理論は具体性ある p. r. f. ないし g. r. f. に基づく数論的構造の議論であり，射影集合論などに比して著しく透明な上，(g. r. f. の定義の出発点を (1)–(3) の他に或る適当な関数族を追加するなどの考慮によって）ボレル族や射影集合族と関連がつくため，現在では古典的な難問をこの形で取り上げることが多い。しかしこれだけが無限や連続の問題に迫る唯一の道かどうか，私自身は未だに迷っている。

チャーチの計算可能性には，チューリングの機械という理想的コンピューターによる定義など，同じように説得的な同値な提言がいくつ

//fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/France-keiken.pdf 所蔵

かある。この機械の場合，コンピューターはディジタルつまり自然数上の計算だから，当然と言えば当然のことながら，例 4 の，証明 ‘Y’ のない場合だったら，チューリングの機械は永久に（!?）動くだけの話である。

- 『数学と哲学との間』（玉川大学出版部，1998 年 12 月）所収。
- 原著にはない「脚注」をつけた。
- 適宜振り仮名をつけた。
- PDF 化には LaTeX 2ε でタイプセッティングを行い、dvipdfmx を使用した。

科学の古典文献の電子図書館「科学図書館」

http://www.cam.hi-ho.ne.jp/munehiro/sciencelib.html

「科学図書館」に新しく収録した文献の案内，その他「科学図書館」に関する意見などは，

「科学図書館掲示板」

http://6325.teacup.com/munehiroumeda/bbs